

Задачник С5

Здесь приведены задачи С5, которые предлагались на ЕГЭ по математике, а также на диагностических, контрольных и тренировочных работах МИОО начиная с сентября 2009 года.

1. (МИОО, 2014) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|(x-1)^2 - 2^{1-a}| + |x-1| + (1-x)^2 + 2^{a-1} = 4 + 4^a$$

имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a .

$$\boxed{1 = x \mid 1 - = v}$$

2. (МИОО, 2013) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$|x - a^2 + a + 2| + |x - a^2 + 3a - 1| = 2a - 3$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу $(4; 19)$.

$$\boxed{(\infty + ; 9] \cap [8 ; \frac{7}{8}]}$$

3. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{7a}{a-5} \cdot 2^{|x|} = 4^{|x|} + \frac{12a+17}{a-5}$$

имеет ровно два различных корня.

$$\boxed{(5 ; 2-) \cap \{0, 2, 1-\}}$$

4. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 10a + 5\sqrt{x^2 + 25} = 4|x - 5a| - 8|x|$$

имеет хотя бы один корень.

$$\boxed{[2\sqrt{10} + 5 ; 2\sqrt{10} - 5] \cap \{5-\}}$$

5. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|\sin^2 x + 2 \cos x + a| = \sin^2 x + \cos x - a$$

имеет на промежутке $(\frac{\pi}{2}; \pi]$ единственный корень.

$$\boxed{\{\frac{7}{1}\} \cap [0 ; \infty -)}$$

6. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 + (a + 7)^2 = |x - 7 - a| + |x + a + 7|$$

имеет единственный корень.

$[-6; 6]$

7. (ЕГЭ, 2013) Найти все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax + \sqrt{3 - 2x - x^2} = 4a + 2$$

имеет единственный корень.

$\{0\} \cap (\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$

8. (ЕГЭ, 2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(4 \cos x - 3 - a) \cos x - 2,5 \cos 2x + 1,5 = 0$$

имеет хотя бы один корень.

$(-\infty; 0] \cap [9; \infty)$

9. (ЕГЭ, 2013) Найдите все значения a , для каждого из которых уравнение

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $[-1; 1)$.

$[1; 1-) \cap (1 - \frac{1}{9}; 1)$

10. (ФЦТ, 2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|\cos x + 3 \sin x + a| = a - 3 \cos x - \sin x$$

имеет хотя бы одно решение на промежутке $(\pi; \frac{3\pi}{2}]$.

$[1; 1-)$

11. (МИОО, 2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1+x^2} + a(1+x^2)}{1+x^2 - 2\sqrt{1+x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

$(-\infty; \frac{1}{3}] \cap (\frac{1}{3}; \infty)$

12. (МИОО, 2013) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2} - a \cdot 2^{1-x^2} + a}{2^{1-x^2} - 1} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

$$(\infty+; z-] \cap (\varepsilon-; \infty-)$$

13. (МИОО, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых на интервале $(1; 2)$ существует хотя бы одно число x , **не** удовлетворяющее неравенству $a + \sqrt{a^2 - 2ax} + x^2 \leq 3x - x^2$.

$$(\infty+; z/\varepsilon)$$

14. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство

$$\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$$

выполняется при всех x .

$$(\varepsilon; 1-)$$

15. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $1 \leq |x| \leq 3$ не меньше 6.

$$(\infty+; \underline{z} \wedge + z] \cap \{0\} \cap [z-; \infty-)$$

16. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{2}{x+1} = a|x-3|$$

на промежутке $[0; +\infty)$ имеет более двух корней.

$$[\varepsilon/z; z/1)$$

17. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\left| \frac{5}{x} - 3 \right| = ax - 2$$

на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

$$(\varepsilon/5; 5/4)$$

18. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 8x + a + 5| > 10$$

не имеет решений на отрезке $[a - 6; a]$.

$$\left[\frac{z}{69 \wedge + z}; \frac{z}{9 \wedge - 61} \right]$$

19. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{1-2x} = a - 7|x|$$

имеет более двух корней.

(1; 2]

20. (ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^{10} + (a - 2|x|)^5 + x^2 - 2|x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

(1; 0)

21. (МИОО, 2012) При каких a уравнение $|x^2 - 2x - 3| - 2a = |x - a| - 1$ имеет ровно три корня?

21/25 или 0

22. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2012) При каких значениях a уравнение $|x + a^2| = |a + x^2|$ имеет ровно три корня?

$\frac{7}{2\sqrt{-1}}$; $\frac{7}{2\sqrt{+1}}$; 1; 0

23. (Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2012) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (y - 2x)(2y - x) \leq 0, \\ \sqrt{(x + a)^2 + (y - a)^2} = \frac{|a + 1|}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

7/11 или 7/1

24. (Федеральный центр тестирования, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$ax - 1 = \sqrt{8x - x^2 - 15}$$

имеет единственное решение.

$\{\frac{91}{8}\} \cap (\frac{8}{1}; \frac{9}{1}]$

25. (Юг, пробный ЕГЭ, 2012) Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y^2 + a = 4 \cos x, \\ \sqrt{y} + z^2 = a, \\ (a - 2)^2 = |z^2 - 2z| + |\sin 2x| + 4 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение, и укажите решения системы для каждого из найденных значений a .

лэн инашэв v хьонн иш $z \in \mathbb{Z} \ni y \in \mathbb{R} \wedge y \neq v$ иш $(z; 0; 2) : \mathbb{Z} \ni u \in \mathbb{R} \wedge 0 = v$ иш $(0; 0; u) + \frac{z}{x}$

26. (МИОО, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 6x + 5|$ больше, чем -24 .

$$\left(\frac{7}{6\sqrt{2}+3}; \frac{7}{6\sqrt{2}-3} \right)$$

27. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + (4a + 5)x + 3a^2 + 5a < 0, \\ x^2 + a^2 = 25 \end{cases}$$

имеет решения.

$$\left(\frac{7}{2\sqrt{5}}; 0 \right) \cap \left(3 - \frac{7}{2\sqrt{5}}; - \right)$$

28. (ЕГЭ, 2011) Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x| - 5)^2 + (y - 4)^2 = 4, \\ (x + 2)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$3 \text{ или } 2 + \sqrt{69}$$

29. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$$

имеет ровно три различных решения.

$$7/2; 4; 9/2$$

30. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9, \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

$$7 - 3\sqrt{2}; 4; 1 + 3\sqrt{2}$$

31. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{12 + 4x - x^2} + 2, \\ y = \sqrt{16 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$[-2; 2) \cup (2; 6]$$

32. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 4)^2 + (|y| - 4)^2 = 4, \\ y = ax + 1, \\ xy > 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\left\{ \frac{9}{2\sqrt{10}+1}, \frac{9}{2\sqrt{10}-1} \right\}$$

33. (ЕГЭ, 2011) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 6|x| + 7 = 5y + 6x^2 + 4a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\left\{ \frac{7}{4} \right\}$$

34. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2011) Найдите все значения параметра b , при каждом из которых корни уравнения

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = b$$

существуют и принадлежат отрезку $[2; 17]$.

$$[8; 1]$$

35. (Санкт-Петербург, репетиционный ЕГЭ, 2011) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4|y-3| = 12 - 3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y-3) - x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

$$\{-4; -3\} \cup \left\{ \frac{5}{12} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{12} \right\} \cup \{-\}$$

36. (МИОО, 2011) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\{-2; 3\}$$

37. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 + xy - 4x - 9y + 20 = 0, \\ y = ax + 1, \\ x > 2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

$$\left(\frac{z}{e}; 1\right] \cap [0; 1-)$$

38. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство

$$||x^2 - 2x - 3| - x^2 + 2x - 5| \leq \frac{1}{3} \left(a^2 - \frac{a}{2}\right) - x^2 + 2x + 1$$

имеет единственное целое решение.

$$\left(\frac{z}{e}; 2\right)$$

39. (МИОО, 2010) Найдите все значения a , при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = x^2 - 7|x - a| - 3x$ на отрезке $[-6; 6]$ принимается хотя бы на одном из концов этого отрезка.

$$\left(\infty +; 7\right] \cap [2; \infty -)$$

40. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$36^x - (8a + 5) \cdot 6^x + 16a^2 + 20a - 14 = 0$$

имеет единственное решение.

$$\left[\frac{z}{1}; \frac{4}{L} - \right)$$

41. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4ax + |x^2 - 8x + 7|$ меньше 1.

$$\left(\infty +; \frac{z}{9^{L+1}}\right) \cap \left(\frac{1}{1}; \infty -\right)$$

42. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения a , при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - 2|x - a^2| - 6x$$

имеет более двух точек экстремума.

$$\left(\frac{z}{z}^{\wedge}\right) \cap \left(\frac{z}{z}^{\wedge} -; z -\right)$$

43. (ЕГЭ, 2010) Найдите все значения a , при каждом из которых ровно одно решение неравенства $x^2 + (5a + 3)x + 4a^2 \leq 4$ удовлетворяет неравенству $ax(x - 4 - a) \leq 0$.

$$1; 1 -; z/e -; e/e -$$

44. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых среди значений функции

$$y = \frac{x^2 - 2x + a}{6 + x^2}$$

есть ровно одно целое число.

(11:1)

45. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\frac{10x - 2x^2 - a}{3}\right) - \cos(2x + a) = x^2 - 8x - a$$

имеет единственное решение.

91-

46. (МИОО, 2010) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$64^{x+a} - 4^{x^2-5x+4a} = x^2 - 8x + a$$

не имеет действительных решений.

(∞+:91)

47. (МИОО, 2010) Найдите все значения a , при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x} + |x+a| \leq 3$ является отрезок.

(7:2-) ∩ [7/6-;8-)

48. (Москва, репетиционный ЕГЭ, 2010) Найдите наименьшее значение параметра a , при котором функция

$$y = 9 + 7x - 3|ax + 2| + |ax + 5| + |x + 1|$$

является неубывающей на всей числовой прямой.

7-

49. (МИОО, 2009) Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} \frac{x - ax - a}{x - 2 + 2a} \geq 0, \\ x - 8 > ax \end{cases}$$

не имеет решений.

[8:1]

50. (МИОО, 2009) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\cos\left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) = 1$$

имеет ровно восемь различных решений.

(18:19) ∩ (19-;18-)

51. (МИОО, 2009) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$3x + |2x + |a - x|| = 7|x + 2|$$

имеет хотя бы один корень.

$$(-\infty; -8] \cup [21; +\infty)$$

52. (МИОО, 2009) Найдите все значения a , при каждом из которых решения неравенства

$$|2x - a| + 1 \leq |x + 3|$$

образуют отрезок длины 1.

$$[2/6; 2/5]$$

53. (МИОО, 2009) Найдите все значения a , при каждом из которых график функции

$$f(x) = x^2 - |x^2 + 2x - 3| - a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

$$(-1; 2)$$